Chap.1 G :

Complexe

Série n°1 :

Les différentes formes

Exercice n°1 :

Mettre sous la forme $a+ib, a, b \in \mathbb{R}$ (forme algébrique) les nombres complexes

$$z_1=\frac{3+6i}{3-4i};\quad z_2=\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2;\ z_3=\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}$$

$$z_4=\frac{5+2i}{1-2i};\qquad z_5=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3;\quad z_6=\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

$$z_7=-\frac{2}{1-i\sqrt{3}};\ z_8=\frac{1}{(1+2i)(3-i)};\ z_9=\frac{1+2i}{1-2i}$$

Exercice n°2 :

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants

$$z_1=2e^{\frac{2i\pi}{3}};z_2=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}};z_3=3e^{-\frac{7i\pi}{8}};z_4=\left(2e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right);$$

$$z_5=\frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{-\frac{3i\pi}{4}}};z_6=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(3e^{\frac{5i\pi}{6}}\right);z_7=\frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{3e^{-\frac{5i\pi}{6}}}$$

z_8, le nombre de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$.

z_9 le nombre de module 3 et d'argument $-\frac{\pi}{8}$.

Exercice n°3 :

1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants, ainsi que leur conjugués :

$$z_1=3+3i;\quad z_2=-1-i\sqrt{3};\quad z_3=-\frac{4}{3}i;\quad z_4=-2;\quad z_5=e^{i\theta}+e^{2i\theta},\qquad \theta\in]-\pi,\pi[$$

Pour z_5, factoriser par $e^{\frac{3i\theta}{2}}$

$$z_6=1+i;\quad z_7=1+i\sqrt{3};\quad z_8=\sqrt{3}+i;\quad z_9=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i};\quad z_{10}=1+e^{i\theta},\qquad \theta\in]-\pi,\pi[$$

Pour z_{10}, factoriser par $e^{\frac{i\theta}{2}}$

2. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants, ainsi que de leur conjugués.

$$z_1=1+i(1+\sqrt{2});\quad z_2=\sqrt{10+2\sqrt{5}}+i(1-\sqrt{5});\quad z_3=\frac{\tan(\varphi)-i}{\tan(\varphi)+i};\quad z_4=\frac{1}{1+i\tan(\theta)}$$

Exercice n°4 :

Calculer le module et un argument de

$$u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\qquad \text{et}\qquad v=1-i$$

En déduire le module et un argument de $\frac{u}{v}$.

Exercice n°5 :

Effectuer les calculs suivants en utilisant la forme exponentielle.

$$z_1=\frac{1+i}{1-i};z_2=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3;z_3=\left(1+i\sqrt{3}\right)^4;z_4=\left(1+i\sqrt{3}\right)^5+\left(1-i\sqrt{3}\right)^5;$$

$$z_5=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i};z_6=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i}$$

Exercice n°6 :

Soit les nombres complexes : $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=1-i$.

a. Mettre sous forme trigonométrique z_1, z_2 et $Z=\frac{z_1}{z_2}$.

b. En déduire que $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

c. On considère l'équation d'inconnue réelle x :

$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x=2$.

Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$ et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice n°7 :

Le plan complexe P est muni d'un repère Orthonormé directe $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soient les nombres complexes : $z_1=(1-i)(1+2i)$, $z_2=\frac{2+6i}{3-i}$ et $z_3=\frac{4i}{i-1}$

ou $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ et $M_3(z_3)$.

1°) a- Ecrire z_1 , z_2 et z_3 sous la forme cartésienne.

b- Placer les points M_1 , M_2 et M_3 sur le plan P.

2°) a- Ecrire $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ sous la forme algébrique.

b- En déduire que le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle isocèle en M_1.

3°) Calculer l'affixe z_4 du point M_4 pour que $M_1M_2M_4M_3$ soit un carré.

Exercice de maison :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.

On donne les points A, B et C d'affixes : $2i$, $\sqrt{3}-i$ et $2ie^{i\theta};\theta\in]0,2\pi[$.

1/ Dans cette question on pose $\theta=2\pi/3$.

a- Placer dans le plan complexe les points A, B et C.

b- Vérifier que $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, en déduire la nature exacte du triangle ABC.

2/ a- Vérifier que $e^{i\theta}-1=2i\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$.

b- En déduire que $z_A-z_C=4\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$